Определенный интеграл.

1. Определение определенного интеграла.

Пусть функция  определена на отрезке , . Разобьем этот отрезок на  произвольных частей точками:

.

Обозначим это разбиение через , а точки  будем называть точками разбиения. В каждом из полученных частичных отрезков  выберем произвольную точку  . Через обозначим , которую условимся называть длиной частичного отрезка .

Образуем сумму:

, (1.1)

которую назовем интегральной суммой для функции  на , соответствующей данному разбиению  на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек . Геометрический смысл суммы  очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями  и высотами , если .

Обозначим через  длину наибольшего частичного отрезка разбиения : .

Определение. Если существует конечный предел  интегральной суммы (1.1) при , то этот предел называется определенным интегралом от функции  по отрезку  и обозначается следующим образом:

 (1.2)

или

.

В этом случае функция  называется интегрируемой на . Числа  и  называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования,  - подынтегральной функцией,  - переменной интегрирования.

Из определения следует, что величина интеграла (1.2) зависит только от вида функции  и от чисел  и . Следовательно, если заданы  и пределы интегрирования, то интеграл (1.2) определяется однозначно и представляет собой некоторое число. Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, т.е. обозначения переменной интегрирования:

 и т.д.

**Теорема 1.** Если функция  непрерывна на отрезке , то она интегрируема на нем.

**Теорема 2.** Если функция  ограничена на отрезке  и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.(без доказательства)

2. Основные свойства определенного интеграла.

1. Интеграл  был введен для случая . Обобщим понятие определенного интеграла.

По определению , (4.1)

По определению  (4.2)

2.  имеет место равенство  (4.3)

*Доказательство.* Допустим сначала, что . Так как предел интегральной суммы  не зависит от способа разбиения отрезка , то будем разбивать  так, чтобы точка  была точкой разбиения. Если, например, , то  можно разбить на две суммы:

.

Переходя в этом равенстве к пределу при , получаем (4.3).

Доказательство для другого положения точек , ,  легко сводится к рассмотренному случаю с помощью (4.2).

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

 (4.4)

*Доказательство.* Действительно, для любого разбиения отрезка  и любого выбора точек  . Переходя к пределу при , имеем

, т.е. (4.4).

4. .

Замечание. Свойство 4 имеет место для любого конечного числа слагаемых.

3. Оценки интегралов. Формула среднего значения.

**Оценки интегралов.** Пусть .

1. Если всюду на отрезке  функция , то .

2. Если всюду на отрезке  , то . (5.1)

*Доказательство.*  и по оценке 1 . Но по свойству 4 , откуда следует (5.1).

3. Для функции , определенной на , имеет место неравенство .

*Доказательство.* Применим оценку 2 к неравенствам .

*Следствие.* Если всюду на отрезке  , то .

4. Если  и  - соответственно наименьшее и наибольшее значение функции  на , то .

**Теорема (теорема о среднем).** Если функция  непрерывна на , то  такая, что . (5.2)

*Доказательство.* Так как  непрерывна на , то по второй теореме Вейерштрасса  такие, что . Отсюда в силу оценки 4 получаем  и, следовательно, . Положим

.

Так как число  заключено между наименьшим и наибольшим значениями непрерывной функции  на , то по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение  такая, что . Поэтому , а это равносильно равенству (5.2).

4. Интеграл с переменным верхним пределом.

До сих пор мы рассматривали интеграл с постоянными пределами интегрирования  и . Если изменять, например, верхний предел так, чтобы не выйти за пределы отрезка , то величина интеграла будет изменяться. Другими словами, интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию своего верхнего предела.

Рассмотрим интеграл   с постоянным нижним пределом  и переменным верхним пределом . Величина этого интеграла является функцией верхнего предела . Обозначим эту функцию через , т.е. положим

 (6.1)

и назовем ее интегралом с переменным верхним пределом.

**Теорема.** Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т.е.

 (6.2)

*Доказательство.* Возьмем  и придадим ему приращение  такое, чтобы  Тогда функция , определенная выражением (6.1), получит новое значение: . Согласно свойству 2 определенного интеграла имеем

.

Отсюда находим приращение функции :

.

Применяя теорему о среднем, получаем

,

где  - число, заключенное между числами  и . Разделим обе части равенства на :

.

Если теперь , то , и тогда, в силу непрерывности функции  на , . Поэтому

 или .

Таким образом, установлено, что любая непрерывная на отрезке  функция  имеет на этом отрезке первообразную, причем функция  - интеграл с переменным верхним пределом – является первообразной для . А так как всякая другая первообразная функции  может отличаться от  только на постоянную, то установлена связь между неопределенным и определенным интегралами в виде

, где  - произвольная постоянная.

5. Формула Ньютона-Лейбница.

Функция , непрерывная на отрезке , имеет на этом отрезке первообразные, причем одной из них является функция .

Пусть  - любая другая первообразная для функции  на том же отрезке . Так как первообразные  и  отличаются на постоянную, то имеет место равенство , , где  - некоторое число. Подставляя в это равенство значение  получаем

, , ,

т.е. 

.

Полагая , получаем основную формулу интегрального исчисления

, (7.1)

которая называется формулой Ньютона-Лейбница.

Разность  принято условно записывать так:

 или ,

и поэтому формулу (7.1) записывают в виде

.

В формуле (7.1) в качестве  можно взять любую первообразную для  на .

*Пример 1.* Вычислить определенный интеграл: .

*Решение*. Делим числитель на знаменатель:





.

6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

**Теорема.** Пусть  - непрерывная функция на отрезке . Тогда, если: 1) функция  дифференцируема на  и  непрерывна на ; 2) множеством значений функции  является отрезок ; 3)  и , то справедлива формула

. (8.1)

*Доказательство.* По формуле Ньютона-Лейбница

,

где  - какая-нибудь первообразная для функции  на . С другой стороны, рассмотрим на отрезке  сложную функцию от переменной : . Согласно правилу дифференцирования сложной функции

.

Отсюда следует, что функция  является первообразной для функции , непрерывной на , и поэтому, согласно формуле Ньютона-Лейбница,

(8.1).

Формула (8.1) называется формулой замены переменной или подстановки в определенном интеграле.

*Замечание 1.* Нет необходимости возвращаться в определенном интеграле к старой переменной. *Пример 2.*

Данный интеграл моно найти внесением под знак дифференциала и последующей заменой переменной



**Теорема.** Если функции  и  имеют непрерывные производные на отрезке , то справедлива формула

. (8.2)

*Доказательство.* Так как функция  является первообразной для функции , то по формуле Ньютона-Лейбница

.

Отсюда получаем , или, что то же самое   (8.2).

Формула (8.2) называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

*Пример 3.* 

.

Дополнительно прочитать:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 8, параграфе 35-39.
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 11 п. 11.1-11.5.